

22. Основные уравнения и задачи математической физики. Общая классификация

22.1. Классификация линейных дифференциальных уравнений 2-го порядка в частных производных. Канонический вид

Физические законы выражают связи между физическими величинами и обнаруживаются из наблюдений за природными явлениями или в результате проведения целенаправленных опытов (экспериментов). Иногда эти законы удается записать в виде алгебраических соотношений (закон Ома, уравнение состояния для идеального газа и многие другие законы элементарной физики). Но чаще всего физические законы выражают связи между изменениями физических величин в пространстве и во времени. Следовательно, если физическая величина является в общем случае функцией одной временной и трех пространственных переменных, то изменения этой величины математически выражаются через частные производные соответствующей функции по временной и пространственным переменным. В итоге физические законы принимают вид дифференциальных уравнений в частных производных. Это может быть дифференциальное уравнение для одной функции от нескольких переменных (уравнение Пуассона (Лапласа) в электростатике, волновое уравнение, уравнение теплопроводности, уравнение Шредингера в квантовой механике и т. д.) или, чаще всего, система дифференциальных уравнений для нескольких функций от нескольких переменных (система уравнений Ньютона в механике, уравнения Максвелла в электродинамике, уравнения Эйлера в гидродинамике, четырехкомпонентное уравнение Дирака в квантовой механике и т. д.). Все такие уравнения принято называть **уравнениями математической физики**, и именно их мы будем рассматривать в нашем курсе.

Вообще говоря, уравнения математической физики являются нелинейными дифференциальными уравнениями, но если сделать дополнительные упрощения⁶¹, то можно получить уже линейные уравнения математической физики. Исторически сложилось так, что в классической физике основное внимание уделяют линейным уравнениям, и ситуация не изменилась с появлением квантовой механики. В настоящее время подавляющее большинство уравнений, описывающих широкий спектр физических явлений в самых разных разделах современной физики, является линейными уравнениями математической физики. Для их изучения был развит мощный математический аппарат, с помощью которого были подробно исследованы свойства этих уравнений и найдены эффективные аналитические и численные методы построения решений этих уравнений. С нелинейными уравнениями ситуация значительно сложнее. Накопленный опыт позволяет утверждать, что многие чрезвычайно интересные и практически очень важные физические явления (термоядерные реакции, многие магнитные явления, шаровые молнии, цунами и т. д.) могут быть адекватно описаны лишь в рамках нелинейных моделей. К сожалению, в настоящее время математический аппарат для изучения нелинейных уравнений находится в процессе построения, многие важные свойства этих уравнений еще не до конца поняты, и лишь для небольшого класса уравнений удалось получить решения, да и то лишь частные. Далее будут рассматриваться только линейные уравнения математической физики.

На основе многовекового опыта развития физики было обнаружено, что подавляющее число физических явлений описывается достаточно узким классом уравнений, а имен-

⁶¹эту процедуру принято называть линеаризацией исходного дифференциальных уравнений

но дифференциальных уравнений 2-го порядка. Исключения лишь подтверждает правило: уравнения 4-го порядка в теории упругости, уравнение 3-го порядка — знаменитое уравнение Кортевега-де-Фриза в нелинейных колебаниях и еще ряд таких же экзотических примеров. Поэтому на первом этапе изучения математической физики можно ограничиться линейными дифференциальными уравнениями 2-го порядка.

Приступая к изучению этих уравнений, естественно попытаться привести их к наиболее простому (так называемому каноническому) виду.

Линейное уравнение 2-го порядка

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \Phi(x, u, \text{grad } u) = 0 \quad (22.1)$$

имеет *канонический вид*, если

$$a_{ij}(x) = \begin{cases} 1 & i \neq j \\ 0, \pm 1 & i = j. \end{cases} \quad (22.2)$$

Записанное в каноническом виде уравнение относится к одному из трех возможных типов.

Эллиптический тип: $\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i} + \Phi = 0$. В этом случае мы имеем просто сумму вторых производных, число которых равно n .

Гиперболический тип: $\sum_{i=1}^r \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i} - \sum_{i=r+1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i} + \Phi = 0$, $0 < r < n$. Здесь вторые производные входят с разными знаками, но их число по-прежнему равно n .

Параболический тип: $\sum_{i=1}^r \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i} - \sum_{i=r+1}^s \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_i} + \Phi = 0$, $0 < r < s < n$. В этом случае часть вторых производных отсутствует.

Любое уравнение (22.1) с произвольными коэффициентами может быть приведено к каноническому виду в любой точке $x = x_0$ с помощью неособенной замены независимых переменных: $y_k = y_k(x)$, $\det \left| \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \right| \neq 0$. Выражая производные в (22.1) через производные новой функции $\tilde{u}$ по новым переменным y_k , получим преобразованное уравнение той же структуры, что и исходное:

$$\sum_{k,l=1}^n \tilde{a}_{kl} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial y_k \partial y_l} + \tilde{\Phi} = 0. \quad (22.3)$$

Новые коэффициенты $\tilde{a}_{kl}(y)$ выражаются через старые $a_{ij}(x)$:

$$\tilde{a}_{kl} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \frac{\partial y_l}{\partial x_j}. \quad (22.4)$$

Нетрудно заметить, что закон преобразования коэффициентов уравнения совпадает с известным из линейной алгебры законом преобразования коэффициентов квадратичной формы при неособенной линейной замене переменных. Действительно, если задана квадратичная форма

$$K(p, p) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} p_i p_j \quad (22.5)$$

и совершенно невырожденное линейное преобразование S от старых переменных p_i к новым переменным q_k

$$p_i = \sum_{k=1}^n s_{ik} q_k, \quad \det |S| \neq 0, \quad (22.6)$$

то новая квадратичная форма примет вид

$$K(q, q) = \sum_{k,l=1}^n \tilde{a}_{kl} q_k q_l, \quad \text{где } \tilde{a}_{kl} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} s_{ik} s_{jl}. \quad (22.7)$$

Сравнивая с (22.4), имеем

$$s_{ik} = \left. \frac{\partial y_k}{\partial x_i} \right|_{x=x_0}. \quad (22.8)$$

Как известно из линейной алгебры, преобразование S , приводящее квадратичную форму к каноническому виду, всегда может быть найдено или методом Лагранжа — методом выделения полных квадратов, или методом Якоби — приведения матрицы к треугольному виду. Несмотря на то, что это преобразование определено не единственным образом, тип уравнения (22.1) в точке определяется однозначно на основании закона инерции квадратичной формы, который гласит, что *число отрицательных и положительных слагаемых в каноническом виде квадратичной формы не зависит от конкретного выбора преобразования.*

Доказанный факт важен в теоретическом отношении, но практически бесполезен. Дело в том, что с точки зрения физики уравнения математической физики всегда нужно рассматривать не в отдельной точке, а в некоторой области изменения переменных.

22.1.1. Случай двух независимых переменных

Задача о приведении уравнения (22.1) к каноническому виду в области с помощью преобразования независимых переменных при числе переменных $n > 2$ вообще говоря, может не иметь решения, поскольку на n искомым функций $y_k(x)$ накладываются $\frac{n(n-1)}{2} + n - 1$ условий, вытекающих из требований $\tilde{a}_{kl} = 0, k \neq l, \tilde{a}_{kl} = 0, \pm 1, k = l$.

Линейное дифференциальное уравнение 2-го порядка с двумя независимыми переменными в общем случае имеет вид:

$$a(x, y) u_{xx} + 2b(x, y) u_{xy} + c(x, y) u_{yy} + \Phi(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \quad (22.9)$$

Функции a, b, c заданы в некоторой области и имеют там непрерывные производные до второго порядка включительно.

Встает вопрос: можно ли каким-нибудь преобразованием независимых переменных привести линейное уравнение к каноническому виду не в отдельной точке, а в некоторой области? Для двух независимых переменных это сделать можно. Общая замена переменных:

$$\xi = \xi(x, y) \quad \eta = \eta(x, y),$$

где ξ и η — произвольные, дважды непрерывно дифференцируемые функции с определителем Остроградского, отличным от нуля (якобиан преобразования):

$$\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \xi_x & \xi_y \\ \eta_x & \eta_y \end{vmatrix} \neq 0.$$

Это необходимое и достаточное условие обратного преобразования $\begin{cases} x = x(\xi, \eta), \\ y = y(\xi, \eta). \end{cases}$

Найдем частные производные:

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x; \\ u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y; \\ u_{xx} &= u_{\xi\xi} \xi_x^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_x \eta_x + u_{\eta\eta} \eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}; \\ u_{yy} &= u_{\xi\xi} \xi_y^2 + 2u_{\xi\eta} \xi_y \eta_y + u_{\eta\eta} \eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}; \\ u_{xy} &= u_{\xi\xi} \xi_x \xi_y + u_{\xi\eta} (\xi_x \eta_y + \xi_y \eta_x) + u_{\eta\eta} \eta_x \eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}; \end{aligned}$$

Уравнение (22.9) принимает вид:

$$\begin{aligned} \left(\underbrace{a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2}_{\tilde{a}} \right) u_{\xi\xi} + 2 \left(\underbrace{a\xi_x\eta_x + b(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + c\xi_y\eta_y}_{\tilde{b}} \right) u_{\xi\eta} + \\ + \left(\underbrace{a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2}_{\tilde{c}} \right) u_{\eta\eta} + \tilde{\Phi}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0, \end{aligned} \quad (22.10)$$

Таким образом линейное уравнение снова перешло в линейное.

Можно поставить вопрос: при каком выборе функций ξ и η уравнение имеет самый простой вид (другими словами, когда коэффициенты нового уравнения (22.10) превращаются в нуль)? Решение этого вопроса эквивалентно, например, решению уравнения:

$$a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 = 0. \quad (22.11)$$

Разделив его на ξ_y^2 , имеем:

$$a \left(\frac{\xi_x}{\xi_y} \right)^2 + 2b \left(\frac{\xi_x}{\xi_y} \right) + c = 0, \quad (22.12)$$

решение которого $\frac{\xi_x}{\xi_y} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}$ сопряжено с возможными трудностями при интегрировании.

К решению этого вопроса можно подойти по-другому.

Лемма 22.11 Возьмем уравнение

$$az_x^2 + 2bz_xz_y + cz_y^2 = 0, \quad (22.13)$$

для которого известно частное решение $z = \varphi(x, y)$. Тогда $\varphi(x, y) = C$ будет общим первым интегралом для обыкновенного дифференциального уравнения

$$ady^2 - 2bxdy + cdx^2 = 0. \quad (22.14)$$

И наоборот, если $\varphi(x, y) = C$ есть общим первым интегралом уравнения (22.14), то $z = \varphi(x, y)$ будет решением первого уравнения (22.13).

Доказательство. Преобразуем уравнение (22.14) к виду:

$$a \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 - 2b \frac{dy}{dx} + c = 0. \quad (22.15)$$

Пусть $\varphi(x, y) = C$ — общий первый интеграл этого уравнения. Выберем произвольную точку (x_0, y_0) и выберем C так, чтобы $\varphi(x_0, y_0) = C_0$. Это неявное задание функции $y = f(x)$, причем $f(x_0) = y_0$. Но для неявно заданных функций

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\partial \varphi / \partial x}{\partial \varphi / \partial y} \Big|_{y=f(x)},$$

так как $dC_0 = 0 = d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy$. Если подставить это выражение в уравнение (22.15), получим

$$a \left(\frac{\partial \varphi / \partial x}{\partial \varphi / \partial y} \right)^2 + 2b \left(\frac{\partial \varphi / \partial x}{\partial \varphi / \partial y} \right) + c = 0 \Rightarrow a\varphi_x^2 + 2b\varphi_x\varphi_y + c\varphi_y^2 = 0.$$

А так как точка (x_0, y_0) была выбрана произвольно, то $z = \varphi(x, y)$ удовлетворяет уравнению тождественно. ■ Следовательно, для определения новых переменных необходимо решить уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - ac}}{a}, \quad (22.16)$$

решением которого могут быть два первых интеграла $\Psi(x, y) = C$ и $\Omega(x, y) = C$. Уравнение (22.16) носит название **уравнения характеристик**. Тип уравнения в области определения уравнения определяется знаком⁶² функции (дискриминанта уравнения (22.16))

$$d(x, y) = b^2(x, y) - a(x, y)c(x, y).$$

Выбор новых переменных ξ и η осуществляется по-разному для каждого из трех возможных случаев.

$d > 0$ — **гиперболический тип**. Решая два уравнения (22.17), находим решения этих уравнений и определяем два первых интеграла. В качестве ξ и η возьмем эти интегралы J_1 и J_2 :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \frac{b + \sqrt{d}}{a} &\Rightarrow \xi(x, y) = J_1(x, y) \Rightarrow \tilde{a} = 0, \\ \frac{dy}{dx} = \frac{b - \sqrt{d}}{a} &\Rightarrow \eta(x, y) = J_2(x, y) \Rightarrow \tilde{c} = 0. \end{aligned} \quad (22.17)$$

В новых переменных уравнение (22.9) примет вид

$$u_{\xi\eta} + \tilde{\Phi} = 0.$$

⁶²Знак дискриминанта может быть выбран в качестве классификатора типа уравнения. Действительно, прямым вычислением можно проверить, что

$$\tilde{b}^2 - \tilde{a}\tilde{c} = (b^2 - ac) \left| \frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} \right|^2,$$

где $\left| \frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} \right|$ — якобиан преобразования, то есть определитель Остроградского.

Это *вторая каноническая форма* для уравнения гиперболического типа. С помощью дополнительной замены $\sigma = \xi + \eta$, $\rho = \xi - \eta$ получим

$$u_{\sigma\sigma} - u_{\rho\rho} + \tilde{\Psi}(\sigma, \rho, u, u_\sigma, u_\rho) = 0.$$

Это *первая каноническая форма* для уравнения гиперболического типа.

$d = 0$ — **параболический тип**. Решая уравнение (22.18), находим один интеграл. В качестве η возьмем этот интеграл:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b}{a} \Rightarrow \eta(x, y) = J(x, y) \Rightarrow \tilde{c} = 0, \quad (22.18)$$

а в качестве второй переменной выбираем любую функцию, линейно независимую к η , например $\xi(x, y) = x \Rightarrow \tilde{b} = 0$. Уравнение (22.9) примет вид

$$u_{\xi\xi} + \tilde{\Phi}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0.$$

$d < 0$ — **эллиптический тип**. Решая одно уравнение (22.19) с комплексными коэффициентами, находим один комплексный интеграл. В качестве ξ и η возьмем действительную и мнимую части этого интеграла $J(x, y)$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b + i\sqrt{-d}}{a} \Rightarrow \begin{cases} \xi(x, y) = \operatorname{Re} J(x, y), \\ \eta(x, y) = \operatorname{Im} J(x, y); \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \tilde{b} = 0, \\ \tilde{a} = \tilde{c}. \end{cases} \quad (22.19)$$

После преобразований уравнение (22.9) примет вид

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \tilde{\Phi}(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta) = 0.$$

Легко проверяется, что во всех случаях якобиан преобразования не равен нулю.

Если $d(x, y)$ не сохраняет знак во всей области, то мы имеем дело с так называемыми *вырожденными уравнениями и уравнениями смешанного типа*.

★Пример. Привести к каноническому виду уравнение Трикоми:

$$u_{xx} + xu_{yy} = 0. \quad (22.20)$$

Имеем $a = 1$, $b = 0$, $c = x$ и $d = -x$.

Условие $d > 0 \Leftrightarrow x < 0$ определяет область G (левую полуплоскость декартовой системы координат). Решая линейные дифференциальные уравнения, найдем интегралы и, следовательно, новые переменные:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = \sqrt{-x} &\Rightarrow \xi = y + \frac{2}{3}(-x)^{3/2}, \\ \frac{dy}{dx} = -\sqrt{-x} &\Rightarrow \eta = y - \frac{2}{3}(-x)^{3/2}; \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \sigma = 2y, \\ \rho = \frac{4}{3}(-x)^{3/2}. \end{cases}$$

Преобразуя производные, получим

$$\begin{aligned} u_x &= u_\sigma \sigma_x + u_\rho \rho_x = -2u_\rho(-x)^{\frac{1}{2}}, \\ u_{xx} &= -4xu_{\rho\rho} + (-x)^{-\frac{1}{2}}u_\rho, \\ u_y &= u_\sigma \sigma_y + u_\rho \rho_y = 2u_\sigma, \\ u_{yy} &= 4u_\sigma. \end{aligned}$$

Подставляя их в уравнение (22.20) и выражая x через ρ , получим в области $x < 0$

$$u_{\sigma\sigma} - u_{\rho\rho} + \frac{1}{3\rho}u_{\rho} = 0.$$

Здесь уравнение Трикоми имеет гиперболический тип.

При $d = 0 \Leftrightarrow x = 0$, очевидно, имеем $u_{xx} = 0 \Rightarrow u_{\xi\xi} = 0$, т.е. уравнение имеет параболический тип. Однако множество $M = \{(x, y) : x = 0, -\infty < y < +\infty\}$ не является областью и этот случай не имеет физического смысла.

Условие $d < 0 \Leftrightarrow x > 0$ определяет область G — правую полуплоскость декартовой системы координат. Решая линейное дифференциальное уравнение, находим комплексный интеграл этого уравнения и, следовательно, новые переменные:

$$\frac{dy}{dx} = i\sqrt{x} \Rightarrow J = -y + i\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow \begin{cases} \xi &= -y, \\ \eta &= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}. \end{cases}$$

Найденная замена приводит уравнение (22.20) к каноническому виду в области $x > 0$:

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{3\eta}u_{\eta} = 0.$$

Здесь уравнение Трикоми имеет эллиптический тип.

Уравнение Трикоми используется в аэродинамике. Смена типа уравнения связана с переходом от дозвуковой скорости полета к сверхзвуковой. ★

22.2. Основные физические процессы, представленные в математической физике

Рассмотрим характерные физические процессы, описываемые различными математическими моделями, и дифференциальные уравнения в частных производных вместе с типичными граничными условиями, входящие в эти модели.

Важный класс уравнений в частных производных описывается линейным уравнением второго порядка, имеющим вид

$$Au \equiv \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x)u = F(x); \quad (22.21)$$

здесь $x = (x_1, \dots, x_n)$. Функции $a_{ij}(x)$, $i, j = 1, \dots, n$, $a_i(x)$, $i = 1, \dots, n$, $a(x)$ называются *коэффициентами* уравнения (22.21), а функция $F(x)$ — *свободным членом*.

22.2.1. Уравнения Лапласа и Пуассона

Уравнение Лапласа имеет вид

$$\Delta u = 0, \quad (22.22)$$

где $u = u(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ — **оператор Лапласа** в $\mathbb{R}^n$. Соответствующее неоднородное уравнение

$$-\Delta u = F \quad (22.23)$$

(F — известная функция) называется **уравнением Пуассона**. Уравнения Лапласа и Пуассона возникают в разнообразных задачах. Например, стационарное (т.е. не меняющееся со временем) распределение температуры в однородной среде и установившаяся форма натянутой мембраны удовлетворяют уравнению Лапласа, а аналогичное распределение температуры при наличии источников тепла (с плотностью, не меняющейся во времени) и форма мембраны при наличии стационарных внешних сил удовлетворяют уравнению Пуассона. Потенциал электростатического поля удовлетворяет уравнению Пуассона с функцией F , пропорциональной плотности зарядов⁶³.

Уравнения Лапласа и Пуассона описывают стационарные состояние тех или иных объектов. Для них не нужно задавать начальных условий, а типичными граничными условиями в случае ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ являются краевое:

условие Дирихле (*условие первого рода*)

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi; \quad (22.24)$$

условие Неймана (*условие второго рода*)

$$\left. \frac{\partial u}{\partial n} \right|_{\partial\Omega} = \varphi; \quad (22.25)$$

третье краевое условие (*условие третьего рода*)

$$\left. \left(\frac{\partial u}{\partial n} + \gamma u \right) \right|_{\partial\Omega} = \varphi, \quad (22.26)$$

где γ, φ — заданные функции на $\partial\Omega$.

22.2.2. Уравнения колебаний

Многие задачи механики (колебания струн, стержней, мембран и трехмерных объемов) и физики (электромагнитные колебания) описываются уравнением колебаний вида

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + F(x, t), \quad (22.27)$$

где неизвестная функция $u(x, t)$ зависит от n ($n = 1, 2, 3$) пространственных координат, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, и времени t ; коэффициенты ρ , p и q определяются свойствами среды, где происходит колебательный процесс; свободный член $F(x, t)$ выражает интенсивность внешнего возмущения. В уравнении (22.27) в соответствии с определением операторов div и grad

$$\operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(p \frac{\partial u}{\partial x_i} \right).$$

В случае *малых поперечных колебаний струны*, представляющей собой натянутую нить, не сопротивляющуюся изгибу (т.е. $|T(x, t)| = T_0 = \text{const}$), уравнение (22.27) принимает вид

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F, \quad (22.28)$$

⁶³ тем самым, в области, где нет зарядов, он удовлетворяет уравнению Лапласа.

где (x, u) есть координаты плоскости, в которой струна совершает поперечные колебания около своего положения равновесия, совпадающего с осью x .

При $F \neq 0$ колебания струны называются **вынужденными**, а при $F = 0$ — **свободными**.

Если плотность ρ постоянна, $\rho(x) = \rho$ то уравнение колебаний струны принимает вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f, \quad (22.29)$$

где $f = \frac{F}{\rho}$, а $a^2 = \frac{T_0}{\rho}$ — постоянная. Уравнение (22.29) называют также **одномерным волновым уравнением**.

Уравнение вида (22.27) описывает также *малые продольные колебания упругого стержня*:

$$\rho S \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(ES \frac{\partial u}{\partial x} \right) + F(x, t), \quad (22.30)$$

где $S(x)$ — площадь поперечного сечения стержня и $E(x)$ — модуль Юнга в точке x .

Из физических соображений следует, что для однозначного описания процесса колебаний струны или стержня необходимо дополнительно задать величины смещения u и скорости u_t в начальный момент времени (*начальные условия*) и режим на концах (*граничные условия*).

Примеры граничных условий:

- если конец x_0 струны или стержня движется по закону $\mu(t)$, то $u|_{x=x_0} = \mu(t)$;
- если на правый конец x_0 струны действует заданная сила $\nu(t)$, то $\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=x_0} = \frac{\nu(t)}{T_0}$;
- если правый конец x_0 стержня закреплен упруго и α — коэффициент жесткости закрепления, то $E \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha u|_{x=x_0} = 0$ в соответствии с законом Гука.

Частным случаем уравнения (22.27) является также *уравнения малых поперечных колебаний мембраны*:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T_0 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + F. \quad (22.31)$$

Если плотность ρ постоянна, то уравнение колебаний мембраны

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right) + f, \quad a^2 = \frac{T_0}{\rho}, \quad f = \frac{F}{\rho}, \quad (22.32)$$

называют также **двумерным волновым уравнением**.

Трехмерное волновое уравнение.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right) + f \quad (22.33)$$

Описывает процессы распространения звука в однородной среде и электромагнитных волн в однородной непроводящей среде. Этому уравнению удовлетворяют плотность газа, его давление и потенциал скоростей, а также составляющие напряженности электрического и магнитного полей и соответствующие потенциалы.

Волновые уравнения (22.29), (22.32), (22.33), можно записать единой формулой:

$$\square_a u = f, \quad (22.34)$$

Где $\square_a$ — **волновой оператор (оператор Даламбера)**,

$$\square_a = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - a^2 \Delta, \quad (\square = \square_1).$$

22.2.3. Уравнение Гельмгольца

Пусть в волновом уравнении (22.34) внешнее возмущение $f(x, t)$ периодическое с частотой ω и амплитудой $a^2 f(x)$

$$f(x, t) = a^2 f(x) e^{i\omega t}.$$

Если искать периодические возмущения $u(x, t)$ с той же частотой и неизвестной амплитудой $u(x)$: $u(x, t) = u(x) e^{i\omega t}$, то для функции $u(x)$ получим стационарное уравнение,

$$\Delta u + k^2 u = -f(x), \quad k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}, \quad (22.35)$$

называемое **уравнением Гельмгольца**.

К краевым задачам для уравнения Гельмгольца приводят задачи на рассеяние (дифракцию). Например, пусть задана приходящая (из бесконечности) плоская волна $e^{i\omega(a, x)}$, $|a| = 1$, $k > 0$, которая подвергается изменению из-за наличия некоторого препятствия на границе $\partial\Omega$ ограниченной области Ω . Препятствие можно задавать, например, с помощью условия $u|_{\partial\Omega} = 0$ или $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\partial\Omega} = 0$. Это препятствие порождает рассеянную волну $\nu(x)$. Эта волна вдали от рассеивающих центров будет близка к расходящейся сферической волне

$$\nu(x) = f\left(\frac{x}{|x|}\right) \frac{e^{ik|x|}}{|x|} + o(|x|^{-1}). \quad (22.36)$$

Поэтому при $|x| \rightarrow \infty$ волна $\nu(x)$ должна удовлетворять условиям вида

$$\nu(x) = O(|x|^{-1}), \quad \frac{\partial \nu(x)}{\partial |x|} - ik\nu(x) = o(|x|^{-1}), \quad (22.37)$$

называемым **условиями излучения Зоммерфельда**. Суммарное же возмущение $u(x)$ вне области Ω складывается из плоской и рассеянной волн:

$$u(x) = e^{ik(a, x)} + \nu(x). \quad (22.38)$$

Отметим также, что функция $f(s)$, $s = \frac{x}{|x|}$, из (22.36) называется **амплитудой рассеяния**.

22.2.4. Уравнения диффузии и теплопроводности

Процессы распространения тепла и диффузии частиц в среде описывается следующим **общим уравнением диффузии**:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(p \operatorname{grad} u) - qu + F(x, t), \quad (22.39)$$

где ρ — коэффициент пористости среды, а p и q характеризуют ее свойства.

Если рассматривается процесс распространения тепла, то $u(x, t)$ есть температура среды в точке $x = (x_1, x_2, x_3)$ в момент времени t . Считая среду изотропной, обозначим через $\rho(x)$, $c(x)$ и $k(x)$ соответственно ее плотность, удельную теплоемкость и коэффициент теплопроводности, а через $F(x, t)$ — интенсивность источников тепла. Процесс распространения тепла описывается функцией, удовлетворяющей уравнению вида

$$c\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(p\operatorname{grad}u) + F(x, t). \quad (22.40)$$

Если среда однородна, т.е. ρ , c и k — постоянные, то уравнение (22.40) принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\Delta u + f, \quad a^2 = \frac{k}{c\rho}, \quad f = \frac{F}{c\rho}. \quad (22.41)$$

Уравнение (22.41) называется **уравнением теплопроводности**. Число n пространственных переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ в этом уравнении может быть любым.

Как и в случае уравнения колебаний, для полного описания процесса распространения тепла необходимо задать начальное распределение температуры u в среде (начальное условие) и режим на границе этой среды (граничное условие).

Примеры граничных условий:

- если на границе $\partial\Omega$ поддерживается заданное распределение температуры u_0 , то $u|_{\partial\Omega} = u_0$;
- если на $\partial\Omega$ поддерживается заданный поток тепла u_1 , то $-k\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\partial\Omega} = u_1$;
- если на $\partial\Omega$ происходит теплообмен согласно закону Ньютона, то $k\frac{\partial u}{\partial n} + h(u - u_0)|_{\partial\Omega} = 0$, где h — коэффициент теплообмена и u_0 — температура среды, окружающей Ω .

22.2.5. Уравнения Максвелла и телеграфные уравнения

Уравнения Максвелла — это система уравнений для векторов $E = (E_1, E_2, E_3)$, $H = (H_1, H_2, H_3)$, задающих напряженности электрического и магнитного полей в какой-либо среде. Она имеет (в гауссовской системе единиц СГС) имеет вид

$$\operatorname{div} D = 4\pi\rho, \quad \operatorname{rot} E = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t}, \quad \operatorname{div} B = 0, \quad \operatorname{rot} H = \frac{4\pi}{c}j + \frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t}, \quad (22.42)$$

где ρ — плотность электрических зарядов, c — скорость света в вакууме и в случае полей в вакууме $D = E$, $B = \mu H$, $j = 0$, а для любых изотропных сред $D = \varepsilon E$, $B = \mu H$, $j = \sigma E + j_s$, где ε — диэлектрическая проницаемость среды, μ — магнитная проницаемость среды, σ — удельная электропроводность (ε , μ , σ могут быть функциями от t , x), j_s — плотность сторонних токов, т.е. токов, поддерживаемых любыми силами, кроме сил электрического поля (например, магнитным полем или диффузией).

Система Максвелла (22.42) является основой теории электромагнитных волн и служит базой для всех радиотехнических расчетов, например для теории волноводов. Граничные и начальные условия для нее обычно задаются из физических соображений.

Из уравнений Максвелла, в частности, выводятся важные для электротехники **телеграфные уравнения**, описывающие изменение силы тока и напряжения в проводе:

$$\frac{\partial i}{\partial x} + C \frac{\partial \nu}{\partial t} + G\nu = 0, \quad \frac{\partial \nu}{\partial x} + L \frac{\partial i}{\partial t} + Ri = 0, \quad (22.43)$$

где x — координата вдоль провода, ν — напряжение в данной точке провода (отсчитываемое от произвольного начального уравнения), i — сила тока, R — удельное сопротивление (на единицу длины), L — удельная самоиндукция, C — удельная емкость, G — удельная утечка.

22.2.6. Уравнения переноса

Для описания процесса распространения частиц вместо уравнения диффузии используется также более точное уравнения — так называемые **уравнения переноса**⁶⁴. Одним из представлений этого класса уравнений является **одноплоскостное уравнение переноса** вида

$$\frac{1}{\nu} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + (s, \text{grad}) \varphi + \sigma \varphi = \frac{\sigma_s}{4\pi} \int_{S_1} \varphi(x, s', t) ds' + F, \quad (22.44)$$

где $\varphi = \nu N(x, s, t)$ — поток частиц, летящих с (одной и той же) скоростью ν в направлении $s = (s_1, s_2, s_3)$, $|s| = 1$; $N(x, s, t)$ — плотность частиц; $F(x, s, t)$ — плотность источников, коэффициенты $\sigma(x, t)$, $\sigma_s(x, t)$ характеризуют свойства среды; S_1 — сфера единичного радиуса в $\mathbb{R}^3$.

Для полного описания процесса переноса частиц необходимо задать начальное распределение потока частиц φ в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ (начальное условие) и режим на границе этой области (граничное условие). Например, если область Ω , где происходит процесс переноса, выпуклая, то граничное условие вида

$$\varphi(x, s, t) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad (s, n) < 0, \quad (22.45)$$

где $n = n(x)$ — единичный вектор внешней нормали к границе области Ω , выражает отсутствие падающего потока частиц на область извне.

Отметим, что уравнение переноса описывает процессы переноса нейтронов в ядерном реакторе, переноса лучистой энергии, прохождение γ -квантов через вещество, движения газов и другие.

22.2.7. Уравнения газо- и гидродинамики

Рассмотрим движение идеальной жидкости (газа), т.е. жидкости, в которой отсутствует вязкость. Пусть $V(x, t) = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ — вектор скорости движения жидкости, $\rho(x, t)$ — ее плотность, $p(x, t)$ — давление, $f(x, t)$ интенсивность источников и $F(x, t) = (F_1, F_2, F_3)$ — интенсивность массовых сил. Тогда эти величины удовлетворяют следующей нелинейной системе уравнений, называемых **уравнениями гидродинамики**⁶⁵.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho V) = f, \quad (22.46)$$

⁶⁴ кинетические уравнения

⁶⁵ газовой динамики

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V, \text{grad}) V + \frac{1}{\rho} \text{grad}(p) = F. \quad (22.47)$$

Уравнения (22.46) и (22.47) называются соответственно **уравнением неразрывности** и **уравнением движения Эйлера**. Чтобы замкнуть эту систему уравнений, необходимо еще задать связь между давлением и плотностью:

$$\Phi(p, \rho) = 0, \quad (22.48)$$

так называемое **уравнение состояния**. Например, для несжимаемой жидкости уравнение состояния имеет вид $\rho = \text{const}$, а для адиабатического движения газа

$$p\rho^{-\kappa} = \text{const}, \quad \kappa = \frac{c_p}{c_v},$$

где c_p и c_v — удельные теплоемкости газа при постоянном давлении и постоянном объеме соответственно.

В частности, если жидкость несжимаема ($\rho = \text{const}$) и ее движение потенциально ($V = -\text{grad}u$), то из уравнения неразрывности (22.46) следует, что потенциал u удовлетворяет уравнению Пуассона.